

Третий тур 30.11.2024. Высшая лига.

1. Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Отрезки AN и DM пересекаются в точке E . На стороне BC отмечена точка F так, что четырехугольник $MENF$ — вписанный. Прямая AD вместе с лучами FM и NE образуют треугольник Δ_1 , а вместе с лучами ME и FN — треугольник Δ_2 . Докажите, что описанные окружности треугольников Δ_1 и Δ_2 касаются.

2. У мага в игре есть мана и красивость, представленные натуральными числами. За один ход маг может сделать ровно одно из трёх действий: (1) если у мага есть хотя бы $2n + 1$ маны для некоторого натурального числа n , то можно потратить $2n$ маны и сделать его красивость равной n ; (2) уменьшить хотя бы на 1 красивость до любого натурального числа; (3) уменьшить хотя бы на 1 ману до любого натурального числа. Петя и Вася по очереди контролируют мага. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Петя. Изначально у мага было 10^6 маны. Существует ли изначальная красивость мага, при которой Вася может выиграть, как бы ни играл Петя?

3. Пусть p — простое число. Дан полный граф на p^2 вершинах. Его ребра раскрашены в k цветов так, что в любом его подграфе на $p + 1$ вершине найдутся ребра всех цветов. Какое наибольшее значение может принимать k ?

4. Пусть n — натуральное число. Назовём *хорошими* числа, являющиеся суммами не более чем n (не обязательно различных) чисел Фибоначчи. Докажите, что количество членов в любой возрастающей арифметической прогрессии, состоящей из хороших чисел, не превосходит $4 \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$.

5. Все грани выпуклого многогранника — четырёхугольники. Его вершины раскрашены в два цвета так, что у любого ребра один конец серый, другой белый. Каждой белой вершине сопоставлена точка на плоскости, а каждой серой — окружность (все сопоставленные точки и окружности различны). При этом ни для какого ребра точка, сопоставленная его белому концу, не лежит на окружности, сопоставленной серому концу, и любые две окружности, соответствующих серым точкам, пересекаются в двух точках. Оказалось, что для всех граней многогранника, кроме одной, выполнено следующее условие: *две общие точки окружностей, сопоставленных её серым вершинам, и две точки, сопоставленные её белым вершинам, лежат на одной окружности или на одной прямой*. Докажите, что и для оставшейся грани это так.

6. При каком наибольшем вещественном a существуют вогнутые функции $f, g: (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ такие, что $f(x)/g(x) = (1 + x)^a$? Напомним, что функция f , заданная на промежутке Δ , называется *вогнутой*, если $f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y)$ для любых $x, y \in \Delta$ и любого $t \in [0, 1]$.

7. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC выбраны точки A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Четырёхугольники $AB_1A_1C_1$, $BC_1B_1A_1$ и $CA_1C_1B_1$ описаны около окружностей с центрами I_A , I_B и I_C соответственно. Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $I_AI_BI_C$ отличаются в четыре раза.

8. Многочлен $f(x, y)$ с комплексными коэффициентами назовём *разделённым*, если он представим в виде суммы многочлена от x и многочлена от y . Разложим разделённый многочлен на неприводимые над \mathbb{C} множители. Обязательно ли один из них разделённый?

9. Дано натуральное $d \geq 100$. $N = 100^d$ бегунов бегут по часовой стрелке по окружности длины N со скоростями $1, 2, \dots, N$. Докажите, что можно выбрать первоначальную расстановку бегунов так, что в любой момент времени на круге не будет пустой дуги длины $100d$.

10. Существует ли натуральное число $n > 1$, при котором первые цифры чисел $2^n, 3^n, \dots, 9^n$ образуют перестановку цифр $2, 3, \dots, 9$?

Третий тур 30.11.2024. Первая лига.

1. Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Отрезки AN и DM пересекаются в точке E . На стороне BC отмечена точка F так, что четырехугольник $MENF$ — вписанный. Прямая AD вместе с лучами FM и NE образуют треугольник Δ_1 , а вместе с лучами ME и FN — треугольник Δ_2 . Докажите, что описанные окружности треугольников Δ_1 и Δ_2 касаются.

2. Орёл и Хомяк играют в следующую игру. У них есть клетчатая полуплоскость (изначально пустая), лежащая сверху от горизонтальной прямой. За ход Орёл ставит один нолик в клетку, а затем Хомяк последовательно ставит два крестика. При этом ставить значок можно лишь в пустую клетку, под которой пустых нет. Если в некоторый момент оказывается, что три нолика стоят подряд в одном горизонтальном, вертикальном или диагональном ряду, Орёл съедает Хомяка. Может ли Хомяк гарантировать себе вечную жизнь?

3. Пусть p — простое число. Дан полный граф на p^2 вершинах. Его ребра раскрашены в k цветов так, что в любом его подграфе на $p + 1$ вершине найдутся ребра всех цветов. Какое наибольшее значение может принимать k ?

4. Пусть n — натуральное число. Назовём *хорошими* числа, являющиеся суммами не более чем n (не обязательно различных) чисел Фибоначчи. Докажите, что количество членов в любой возрастающей арифметической прогрессии, состоящей из хороших чисел, не превосходит $4 \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$.

5. Все грани выпуклого многогранника — четырёхугольники. Его вершины раскрашены в два цвета так, что у любого ребра один конец серый, другой белый. Каждой белой вершине сопоставлена точка на плоскости, а каждой серой — окружность (все сопоставленные точки и окружности различны). При этом ни для какого ребра точка, сопоставленная его белому концу, не лежит на окружности, сопоставленной серому концу, и любые две окружности, соответствующих серым точкам, пересекаются в двух точках. Оказалось, что для всех граней многогранника, кроме одной, выполнено следующее условие: *две общие точки окружностей, сопоставленных её серым вершинам, и две точки, сопоставленные её белым вершинам, лежат на одной окружности или на одной прямой*. Докажите, что и для оставшейся грани это так.

6. Для неотрицательных действительных чисел x, y, z таких, что $x + y + z = 3$, и натуральных чисел k и m докажите неравенство

$$\sqrt[m]{xy} \cdot \frac{\sqrt[k]{z}}{1 + \sqrt[k]{z}} + \sqrt[m]{yz} \cdot \frac{\sqrt[k]{x}}{1 + \sqrt[k]{x}} + \sqrt[m]{zx} \cdot \frac{\sqrt[k]{y}}{1 + \sqrt[k]{y}} \leq \frac{3}{2}.$$

7. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC выбраны точки A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Четырёхугольники $AB_1A_1C_1$, $BC_1B_1A_1$ и $CA_1C_1B_1$ описаны около окружностей с центрами I_A , I_B и I_C соответственно. Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $I_AI_BI_C$ отличаются в четыре раза.

8. Многочлен $f(x, y)$ с комплексными коэффициентами назовём *разделённым*, если он представим в виде суммы многочлена от x и многочлена от y . Разложим разделённый многочлен на неприводимые над \mathbb{C} множители. Обязательно ли один из них разделённый?

9. 2024 одинаковые книги разложены по нескольким стопкам. Андрею можно проводить следующие операции: если в каждой стопке хотя бы k книг, то он может забрать из каждой стопки по k книг и разложить все взятые книги на k новых равных стопок (при разных операциях значения k могут быть разными). При каком наименьшем N Андрей всегда может с помощью таких операций последовательно получить несколько расположений книг, среди которых есть хотя бы N различных расположений? Расположения считаются различными, если найдется такое натуральное t , что стопок высоты t в этих расположениях не поровну.

10. Существует ли натуральное число $n > 1$, при котором первые цифры чисел $2^n, 3^n, \dots, 9^n$ образуют перестановку цифр 2, 3, \dots , 9?